

Logique I

G. Longa

Plan du cours

- 1 Les systèmes logiques
- 2 Logique propositionnelle : version formelle
- 3 Systèmes de preuve (pour Lp)
- 4 Tables de vérité

Un *Système Logique* se compose généralement de trois choses :

- **Syntaxe** : langage formel (alphabet + règles de formation)
- **Sémantique** : signification des symboles appartenant au langage formel
- **Système(s) de preuve** : techniques (calculs) pour obtenir ou identifier les énoncés « valides » du langage donné.

- Syntaxe :

- ▶ Alphabet :

- $V = \{P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots\}$
 - $P = \{(\, , \,)\}$
 - $C = \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \equiv\}$

- Syntaxe :
 - ▶ Alphabet :
 - $V = \{P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots\}$
 - $P = \{(\, , \,)\}$
 - $C = \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \equiv\}$
 - ▶ Règles de formation
 - Chaque $\alpha \in V$ est une Fp

- Syntaxe :

- ▶ Alphabet :

- $V = \{P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots\}$
 - $P = \{ (,) \}$
 - $C = \{ \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \equiv \}$

- ▶ Règles de formation

- Chaque $\alpha \in V$ est une Fp
 - Si α est une Fp , $\neg\alpha$ est une Fp

- Syntaxe :

- ▶ Alphabet :

- $V = \{P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots\}$
 - $P = \{ (,) \}$
 - $C = \{ \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \equiv \}$

- ▶ Règles de formation

- Chaque $\alpha \in V$ est une Fp
 - Si α est une Fp , $\neg\alpha$ est une Fp
 - Si α et β sont des Fp , $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \equiv \beta)$ sont des Fp

- Syntaxe :

- ▶ Alphabet :

- $V = \{P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots\}$
 - $P = \{ (,) \}$
 - $C = \{ \wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \equiv \}$

- ▶ Règles de formation

- Chaque $\alpha \in V$ est une Fp
 - Si α est une Fp , $\neg\alpha$ est une Fp
 - Si α et β sont des Fp , $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \equiv \beta)$ sont des Fp
 - Rien d'autre n'est une Fp

- Syntaxe :

- ▶ Alphabet :

- $V = \{P, Q, R, \dots, P_1, P_2, \dots\}$
 - $P = \{(\, , \,)\}$
 - $C = \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \equiv\}$

- ▶ Règles de formation

- Chaque $\alpha \in V$ est une Fp
 - Si α est une Fp , $\neg\alpha$ est une Fp
 - Si α et β sont des Fp , $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$, $(\alpha \equiv \beta)$ sont des Fp
 - Rien d'autre n'est une Fp

- Sémantique :

- ▶ $V \rightarrow \{1, 0\}$ ou $V \rightarrow \{V, F\}$

Les suites de symboles ci-dessous sont des Fp :

(a) Y

(c) $(X \rightarrow Y)$

(d) $((X \rightarrow Y) \rightarrow X)$

(e) $((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \wedge Z))$

(f) $((\neg X) \rightarrow Y)$

(g) $(\neg(\neg X))$

(h) $((\neg(\neg X)) \rightarrow Y)$

(i) $((\neg(\neg X)) \rightarrow Y) \vee (\neg(X \wedge Y))$

Les suites de symboles ci-dessous sont des Fp :

(a) Y

(c) $(X \rightarrow Y)$

(d) $((X \rightarrow Y) \rightarrow X)$

(e) $((X \rightarrow Y) \rightarrow (X \wedge Z))$

(f) $((\neg X) \rightarrow Y)$

(g) $(\neg(\neg X))$

(h) $((\neg(\neg X)) \rightarrow Y)$

(i) $((\neg(\neg X)) \rightarrow Y) \vee (\neg(X \wedge Y))$

N.B. simplification de parenthésage : les parenthèses les plus externes peuvent être supprimées.

Les suites de symboles ci-dessous ne sont pas des Fp :

(a) YZ

(b) $Z\neg Y$

(c) $X \rightarrow Y\neg Z$

(d) $((X \rightarrow \vee) \rightarrow X)$

Systèmes de preuve (pour Lp)

- Dédution naturelle (Gentzen)
- Tables de vérité
- Tableaux (Beth, Gentzen, Hintikka)
- Calcul des séquents (Gentzen)
- Méthode Axiomatique (Frege, Hilbert et Ackermann)
- Résolution (Robinson)
- ...

- La signification des symboles des connecteurs logiques introduits dans la section précédente (l'ensemble $C = \{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \equiv\}$) est entièrement décrite par leurs tables de vérité
- Une table de vérité est un tableau représentant les valeurs booléennes de sortie d'une expression logique en fonction de leurs entrées
- Dans ce qui suit, v (*valuation*) indiquera une distribution de valeurs de vérité aux variables propositionnelles composant une Fp

La construction d'une table de vérité

Variables propositionnelles	Formule propositionnelle

Selon le nombre de variables propositionnelles présentes dans la formule propositionnelle (Fp) à étudier, on aura différentes combinaisons à examiner.

Nombre de variables et combinaisons à examiner

1 variable

Si Fp contient **1 variable** (ex. P) : 2 combinaisons

$$P \in \{V, F\}$$

2 variables

Si Fp contient **2 variables** (ex. P, Q) : $2^2 = 4$ combinaisons

$$(P, Q) \in \{(V, V), (V, F), (F, V), (F, F)\}$$

3 variables

Si Fp contient **3 variables** (ex. P, Q, R) : $2^3 = 8$ combinaisons

$$(P, Q, R) \in \{(V, V, V), (V, V, F), (V, F, V), (V, F, F), (F, V, V), (F, V, F), (F, F, V) \dots\}$$

Table de vérité : une seule variable

Si une formule propositionnelle contient une seule variable A , alors il n'y a que **2 cas possibles**.

A	Fp
V	
F	

Table de vérité : deux variables

Si une formule propositionnelle contient deux variables A et B , alors il y a **4 cas possibles**.

A	B	Fp
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Table de vérité : trois variables

Si une formule propositionnelle contient trois variables A , B et C , alors il y a **8 cas possibles**.

A	B	C	Fp
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Règle générale : nombre de cas à examiner

Soit une formule propositionnelle Fp contenant n variables propositionnelles distinctes.

Règle générale

Le nombre de combinaisons (ou cas possibles) à examiner dans la table de vérité est :

$$2^n$$

Exemples

- $n = 1 \Rightarrow 2^1 = 2$ cas
- $n = 2 \Rightarrow 2^2 = 4$ cas
- $n = 3 \Rightarrow 2^3 = 8$ cas
- $n = 4 \Rightarrow 2^4 = 16$ cas

Tables de vérité pour les connecteurs

La négation

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

$$v(\neg\alpha) = V \text{ ssi } v(\alpha) = F$$

La conjonction

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

$$v(\alpha \wedge \beta) = V \text{ ssi } v(\alpha) = V \text{ et } v(\beta) = V$$

La disjonction

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

La disjonction

α	β	$\alpha \vee \beta$		α	β	$\alpha \underline{\vee} \beta$
V	V	V		V	V	F
V	F	V		V	F	V
F	V	V		F	V	V
F	F	F		F	F	F

La disjonction

α	β	$\alpha \vee \beta$		α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V		V	V	F
V	F	V		V	F	V
F	V	V		F	V	V
F	F	F		F	F	F

$$v(\alpha \vee \beta) = F \text{ ssi } v(\alpha) = V \text{ et } v(\beta) = V$$

Le conditionnel (matériel)

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

$$v(\alpha \rightarrow \beta) = F \text{ ssi } v(\alpha) = V \text{ et } v(\beta) = F$$

L'équivalence

α	β	$\alpha \equiv \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

L'équivalence

α	β	$\alpha \equiv \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

α	β	$(\alpha \rightarrow \beta)$	$\wedge$	$(\beta \rightarrow \alpha)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Table de vérité : 2 variables (16 possibilités / connecteurs)

A	B	f0	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	f15
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V

Table de vérité : 2 variables (16 possibilités / connecteurs)

A	B	C	f1	f2	f3	f4	f5	f6	f7	f8	f9	f10	f11	f12	f13	f14	T
V	V	F	F	F	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V	F	V

L'output des tables de vérité

Après le calcul de la table de vérité de n'importe quel Fp , nous avons 3 (et seulement 3) résultats possibles :

- **Tautologie (Fp valide)** : Une Fp est une tautologie si pour toute valuation v on a $v(Fp) = V$
- **Antilogie (contradiction)** : Une Fp est une contradiction si pour toute valuation v on a $v(Fp) = F$
- **Fp satisfaisable** : Une Fp est satisfaisable s'il existe au moins une valuation v telle que $v(Fp) = V$. Par abus de langage, on dira qu'une telle valuation v est un modèle de la Fp

Exemple : $(R \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg R)$

Exemple : $(R \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg R)$

R	S	$(R \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg R)$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exemple : $(R \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg R)$

R	S	$(R \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg R)$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple : $(R \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg R)$

R	S	$(R \rightarrow S)$	$\rightarrow$	$(\neg S \rightarrow \neg R)$
V	V	V		V
V	F	F		F
F	V	V		V
F	F	V		V

Exemple : $(R \rightarrow S) \rightarrow (\neg S \rightarrow \neg R)$

R	S	$(R \rightarrow S)$	$\rightarrow$	$(\neg S \rightarrow \neg R)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V